量子客体上的博弈

吴金闪

Department of Physics & Astronomy
University of British Columbia
Vancouver, B.C. Canada, V6T 1Z1

June 3, 2011

提纲

1. 量子力学简介（态叠加原理与密度矩阵）
2. 经典概率论的密度矩阵形式
3. 经典博弈论简介（密度矩阵形式）
4. 量子博弈的定义
5. 量子博弈的特点
6. 可供研究的问题
7. 致谢，参考文献

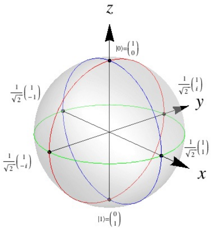
量子力学与经典概率论

1. 量子客体的态与物理量：Hilbert空间$\mathcal{H}$，密度矩阵（$\rho \in \mathcal{N}(\mathcal{H})$），厄米算符（$H \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$），幺正算符（$U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$）
2. 状态的演化与物理量的平均值：

$$\rho_f = U \rho_0 U^\dagger, \tag{1}$$

$$E = tr(\rho H). \tag{2}$$

3. 态叠加原理：$\forall |\phi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H}, \alpha |\phi\rangle + \beta |\psi\rangle \in \mathcal{H}$。注意：**经典客体不具有这一性质**。这一性质导致密度矩阵的非对角元：例子，处于x方向向上态的自旋：



$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \longrightarrow \rho^q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}. \tag{3}$$

量子力学与经典概率论续

1. 经典概率论的矩阵形式：对角化的密度矩阵，也满足方程(1)和(2)。例子，处于正面以及正反各半的硬币：

$$\rho_1^c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \rho_2^c = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

2. 如果我们指定正面获得一块钱，反面失去一块钱，也就是$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$，那么按照方程(2)对以上状态2计算平均收益，我们得到，

$$\langle A \rangle = tr(\rho_2^c A) = \frac{1}{2} tr(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}) = 0. \tag{5}$$

这与经典概率论的$\langle A \rangle = \sum_j A_j p_j$完全一致。

3. 可以看成仅仅是概率论的一种新的表达方式。下面我们会看见这种新的表达方式的意义。

经典博弈

1. 博弈：多个体的有利益冲突的决策行为，行为预测，机制设计
2. 博弈的解：纯策略与混合策略，**混合策略Nash均衡的存在性**
3. 例子：翻硬币游戏，抽象定义与操作性定义
   - 抽象定义：策略（$S^{1,2} = \{I, X\}$，对应不翻，翻），支付矩阵（$\{G^{1,2}\}$），博弈定义为$\Gamma^c = \left(S^1 \otimes S^2, G^{1,2}\right)$，

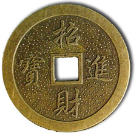
$$G^1 = \left[\begin{array}{c|cc} & I & X \\ \hline I & 1 & -1 \\ X & -1 & 1 \end{array}\right] = -G^2, E^i = \left(p^1\right)^T G^i p^2, \tag{6}$$

     其中$p^i = \left[p^i_I, p^i_X\right]^T$为混合策略**几率分布矢量**。
   - 操作性定义：初态（$\rho_0^c \in \mathcal{H}$），操作（$S^{1,2} = \mathcal{U}(\mathcal{H}), S = S^1 \otimes S^2$），算符操作（$\mathcal{L}| : S \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$），收益函数（$\{P^{1,2}\}$），博弈定义为$\gamma^c = \left(\rho_0^c, \mathcal{U}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{U}(\mathcal{H}), \mathcal{L}, P^{1,2}\right)$，

$$P^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -P^2, E^i = tr\left(\mathcal{L}\rho_0^c\mathcal{L}^\dagger P^i\right). \tag{7}$$

量子博弈的操作性定义

1. 把硬币换成自旋，当作博弈的客体



$\longrightarrow$

2. 第一个不同：纯策略集更大了[1]，$Z_2 \longrightarrow SU(2)$。
3. 经典博弈也可以有无穷多个（或者连续的）纯策略。混合策略在博弈论中有特殊的地位。
4. 什么是量子混合策略：更大策略集上的概率分布？来自传统经典博弈论研究者的批评[2]。

经典与量子博弈新的抽象定义

1. 看不见客体，只看见策略，**混合策略**
2. 经典博弈的新的抽象定义，$\Gamma^{c,new} = \left\{S^1 \otimes S^2, H^{1,2}\right\}$，混合策略：$\rho^c = \rho^{c,1} \otimes \rho^{c,2}$，收益：$E^{1,2} = tr\left(\rho^c H^{1,2}\right)$。例子，翻硬币：

$$\rho^{c,i} = \begin{bmatrix} p^i & 0 \\ 0 & 1-p^i \end{bmatrix}, H^1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} = -H^2 \qquad (8)$$

3. 量子博弈的操作性定义，

$$\gamma^q = \left(\rho_0^q, \mathcal{U}\left(\mathcal{H}\right) \otimes \mathcal{U}\left(\mathcal{H}\right), \mathcal{L}, P^{1,2}\right), \qquad (9)$$

与经典博弈的操作性定义相同，唯一的不同在于ρ_0^q代替了ρ_0^c。
4. 量子博弈的抽象定义：

$$\Gamma^{q,new} = \left\{S^1 \otimes S^2, H^{1,2}\right\}, \qquad (10)$$

混合策略：$\rho^q = \rho^{q,1} \otimes \rho^{q,2}$，收益：$E^{1,2} = tr\left(\rho^q H^{1,2}\right)$。

经典与量子博弈真正的不同

1. 量子混合策略：密度矩阵和支付矩阵的非对角元，无穷个事件上的几率分布函数之于有限维密度矩阵
2. 原因：策略的叠加原理。经典策略$\alpha I+\beta X$不是东西，但是量子策略$\frac{I+iX}{\sqrt{2}}\in SU(2)$，是一个有意义的策略。（出现这样的混合策略：$-i\,|I)\,(X|$）。
3. 例子，翻自旋：

$$H^1=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -i & 0 & 0 & i & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\
0 & -1 & -i & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -i & 0 & 0 & i & 0 & -1 & -i & 0\\
0 & i & -1 & 0 & i & 0 & 0 & -i & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & i & -1 & 0\\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -i & 0 & 0 & i & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\
0 & -1 & -i & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -i & 0 & 0 & i & 0 & -1 & -i & 0\\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -i & 0 & 0 & i & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\
i & 0 & 0 & i & 0 & i & 1 & 0 & 0 & -1 & i & 0 & i & 0 & 0 & i\\
0 & 1 & i & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & i & 0 & 0 & -i & 0 & 1 & i & 0\\
0 & i & -1 & 0 & i & 0 & 0 & -i & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & i & -1 & 0\\
-i & 0 & 0 & -i & 0 & -i & -1 & 0 & 0 & 1 & -i & 0 & -i & 0 & 0 & -i\\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -i & 0 & 0 & i & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\
0 & -i & 1 & 0 & -i & 0 & 0 & i & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -i & 1 & 0\\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -i & 0 & 0 & i & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\
0 & -1 & -i & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -i & 0 & 0 & i & 0 & -1 & -i & 0\\
0 & i & -1 & 0 & i & 0 & 0 & -i & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & i & -1 & 0\\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -i & 0 & 0 & i & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}.$$

量子博弈进一步研究的方向

1. 纠缠的量子客体初态
2. 纠缠的博弈者，用量子态作为策略的载体，以及这样做的问题
3. 更加广义的策略，局部测量，$S^i \supset \mathcal{U}(\mathcal{H})$
4. 密度矩阵形式（而不是概率分布形式的）的Nash均衡？
5. 趋向均衡的道路，演化量子博弈问题

Final Take-Home Message：量子博弈之于经典博弈就是量子力学之于经典力学

参考文献

1. D.A. Meyer, *Quantum Strategies*, Phys. Rev. Lett. **82**(1999), 1052-1055.
2. S.J. van Enk and R. Pike, *Classical rules in quantum games*, Phys. Rev. A **66**(2002), 024306.
3. J. Wu, Hamiltotian Formalism of Game Theory, arXiv: quant-ph/0501088.
4. H. Guo, J. Zhang and G.J. Koehler, *A survey of quantum games*, Decision Support Systems, **46**(2008), 318-332.

致谢

- 感谢会议组织者的邀请
- 得益于与裴寿镛老师的诸多讨论