量子力学讲义

吴金闪

北京师范大学系统科学学院

March 2, 2015

从这里，你可以学到什么？

1. 理解型学习的方法：学习任何东西，想要学到手，必须先理解，然后尝试去运用（习题、日常生活、科学研究、科普书、思考方式）
2. 运用理解型学习来学习量子力学：老师可以帮你选择重点、整理思路、回答你的问题，其它全是你自己的；量子力学是非常神奇和深刻的学问，不象其它任何一门科学
3. 学会自学：大量的自学、阅读、整理自己的理解的报告
4. 批判性：除了你能够理解的东西，其他的都不可信
5. 创新性：把握事物之间的联系，找到新的联系

吴金闪简介

1. 吴金闪，系统科学学院。从事非平衡统计物理学、量子力学、博弈论、复杂网络等领域的研究，也涉猎科学学、运筹学、教学、语言等方面的研究。
2. 学习过9门量子力学课程：北京师范大学（2）、SFU（1）、UBC（4），场论UBC（2）。这些课程包含传统的波函数与Schroedinger方程的路子，算符代数的路子，Feynman的二维系统，路径积分的路子，泛函分析的路子
3. 可以选择自学，可以不来上课，只要能通过我的考试。所有的试题要求你理解，理解以后会很简单，不理解基本不能完成。举例上下山的平均速度
4. 不容忍作弊、剽窃，发现的话，当次作业、考试或者课程项目一律给零分
5. 欢迎提问题，随时打断我，多交流，可能会与你争论。如果你能够发现错误提出（5′）并在课堂上说服我（5′）会获得奖励计入期末成绩直到100分。简单笔误、口误不算

吴金闪简介，续

1. 除了每一次课的开始的导入部分，讲授内容我不会复习，也不需要你预习，除非以你选择以自学为主，上课认真听讲认真思考跟上思路，课后完成作业来达到复习的目的
2. 如果需要预习，了解整体思路，下节课要讲什么可以，**绝对不能提前看书**，如果一个老师不能在学生不预习的情况下把东西讲明白，就不是一个合格的老师
3. 每一节课都会有导入部分，介绍与上一次课的联系、这节课的主要内容和思想、与课程整体的联系
4. 强调一遍，作业非常重要，不完成一定量的作业，理解只可能是空中楼阁
5. 助教王馨老师，大家都可以在课间或者别的时间去请教

量子力学课程课程简介，动机

1. 量子力学是整个现代物理学的基础，也是整个数码时代的理论基础。
2. 神奇的学问，大概是Feynman的说法，“有报道说有12个人懂相对论。......，我认为在他（Einstein）之后，有很多人懂，但是，我可以放心地说，懂量子力学的半个都没有”。物理系裴寿镛老师说“不学量子力学人生不完整”。
3. 一个硬币其正面显示的状态必须是两个面之一，一个量子的硬币（以后你会知道他叫自旋）的状态**不是非得要两个面之一**。如果仅仅是变成很多很多面之一，也不怎么奇怪，从少（离散）状态变成多（连续）状态。但是，奇怪的事情是**每一次观测（以后会更明确什么是测量）确实仅仅得到两个可能的面之一**。学习量子力学最最主要的事情就是明白这是怎么回事。
4. 一句话，做为人类的一般知识，任何科学家、哲学家、教育家都不能不了解量子力学

量子力学课程课程简介，动机，续

1. 量子力学的意义远远不仅仅在物理学。举例量子信息、量子计算（因子分解），量子博弈，鸟的导航、光合作用，**带着量子角子机的外星人**
2. 本课程与国内其他量子力学课程的不同：一般课程教会学生做波函数的相关计算，我们希望教会大家明白量子力学能够明白的地方，了解目前来说还不能明白的地方，以及为什么还不能明白，然后也要学会一些计算
3. Feynman说过，关于学习物理，有一个小秘密：学得越高级，它就越简单。拿着一片一片的拼图是很难搞清楚到底是什么图像的，学多了联系起来了，就简单了
4. 除了量子力学的内容，还将讲授基于概念地图的理解型学习方法（meaningful learning）

关于英文授课

1. 教材：Feynman 《Feynman's lectures on physics, III》，Joseph Donald Novak《Learning, Creating, and Using Knowledge: Concept Maps as Facilitative Tools in Schools and Corporations》
2. 中文版：吴金闪《量子力学讲义》，Feynman《Feynman物理学讲义》第三卷，吴金闪《概念地图教学与学习方法》，方展画翻译的《学会学习》
3. 参考书：裴寿镛《量子力学》、喀兴林《高等量子力学》、L.E. Ballentine《Quantum Mechanics：A Modern Development》R. Shankar《Principles of Quantum Mechanics》、J. J. Sakurai《Modern Quantum Mechanics》，吴兆颜《高等量子力学》
4. 我用英文授课，使用英文教材，我会提供中文讲义，中文习题

本课程考核方式

1. 作业：40%，考试：50%，课后阅读与报告：10%
2. 每周一次作业3-4道题，布置以后的下一周的上课时间交；有期末考试，闭卷，会给公式，可以用计算器、科学计算软件
3. 提前的警告：我不会放水，不及格就是不及格；上交作业时间是定的，deadline之后交的每过一天扣除总得分的10%
4. 课程网站：http://systemsci.org/qm/，发布讲义、通知等，也做学生之间、学生老师间交流用
5. 注意：本课程不是必修课，不感兴趣、上不下去的可以退课，不是每个人都能学会这个学习方法，也不是每个人都能理解量子力学

本课程简短提纲

1. 量子力学实验基础：为什么要有量子力学
2. 线性代数、概率论、经典力学复习
3. 二维系统的波函数、状态矢量、算符
4. 二维量子系统的测量：平均值、测量值
5. 二维量子系统的Schroedinger方程的演化、定态与演化算符
6. 量子力学的Schreodinger与Heisenberg绘景
7. 二维量子力学的表象，自旋算符
8. 谐振子：位置表象，代数解法
9. 两个二维量子系统的状态：相互作用与纠缠态
10. 量子信息简介：远程传输、因子分解算法

第一次讲授内容的提纲

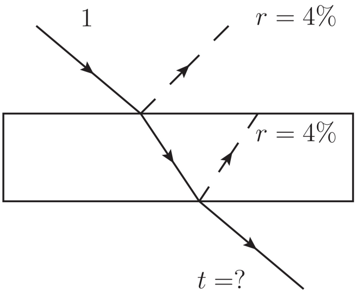
1. 本人简介
2. 本课程简介
3. 经典理论解释不了的实验：量子力学的必要性
4. 初涉概念地图（concept maps and concept mapping以下简称Cmap）
5. 课后思考，阅读材料

经典理论解释不了的实验

1. 铺垫，概率性叠加原理
2. 引入，单光子双光路偏振实验，偏振与偏振分波器
3. 展开1，经典波性加上概率性叠加原理的失败
4. 展开2，经典粒子性加上概率性叠加原理的失败
5. 总结，光子（电子）既是粒子又是波，既不是粒子也不是波，由概率幅的态叠加原理所描述
6. 以概念地图的方式做一个总结
7. 进一步的思考：真的解释不了吗?

照相机镜头：光在玻璃上的反射与双层反射

1. 单层反射4%，双层反射大约8%?
2. 实验0% – 16%，怎么发生的？反射的更少怎么理解？射出去的又回来了？怎么可能?



3. 如果有三层呢，更多的层呢?
4. 波动力学的解释和单个光子的行为：看起来光子必须同时走两条路，就像波一样可以无限分开，可是单光子是一个单位而且可以探测的呀！

铺垫，概率性叠加原理

1. 考虑一个无偏的色子，各向$\frac{1}{6}$，计算偶数面出现的几率
2. 互斥事件的概率性叠加原理

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \forall A \cap B = \phi. \tag{1}$$

背景物理知识：光子偏振的概念地图

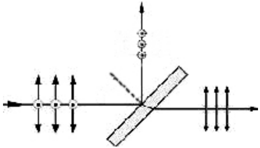
1. 核心问题：什么是光子的偏振
2. 相关概念：光子、光波、振动、波、横波、平面波、电磁场、数学描述、偏振、线偏振、圆偏振、椭圆偏振、偏振的检测、偏振片、偏振片的原理
3. 沿z方向传播的的平面电磁波的数学描述

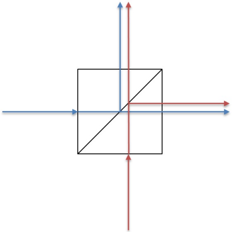
$$\vec{A} = A_0 \cos(kz - \omega t + \phi_0)\hat{i} + A_1 \cos(kz - \omega t + \phi_1)\hat{j} \tag{2}$$

4. 偏振片的内部方向，不是光的传播方向，也就是上式中$\hat{i}$方向的确定

背景物理知识：偏振分光器

1. 偏振分波器





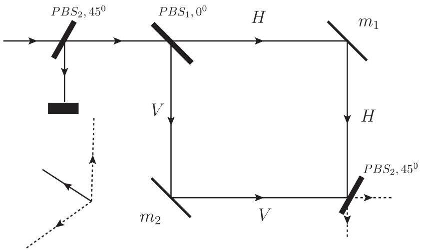
2. 偏振的数学描述，二维矢量：

$$\vec{E} = E_H \hat{H} + E_V \hat{V} \tag{3}$$

3. 线偏振光子过偏振片（$\hat{r}$方向的半反半透镜）的概率性图景：二维矢量在偏振方向上的分解，一部分水平分量强度$E_{/\!/} = \vec{E} \cdot \hat{r}$，另一部分是竖直分量$E_{\perp}$。
4. 偏振的波动力学图景：经典波的叠加原理——部分波**同时到达**的话要做各个部分波的矢量叠加。

展开，单光子which-way实验

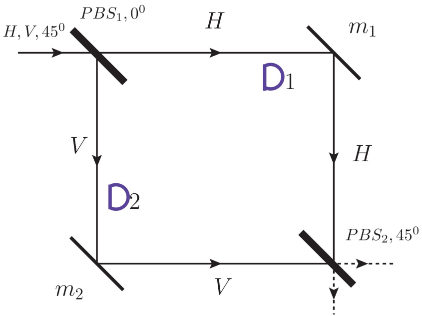
1. 实验装置



2. 问观测到几个方向上的输出?
3. 多光子图景，部分与部分相干，相互抵消，但是单光子呢? 经典波性加上概率性叠加原理的失败
4. 开放其中一条光路的结果：两个输出
5. 两条都开放：只有一个输出，为什么? 经典粒子性加上概率性叠加原理的失败

展开，单光子which-way实验加上路径探测器

1. 实验装置



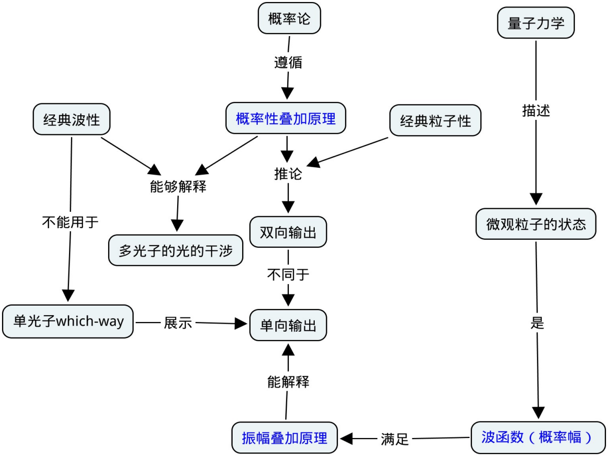
2. 几个输出？以后会教大家怎么算（将来的主要任务）：

$$\rho = 0.5 \sum_j \left\langle D_j \right| \left(|H, 1\rangle + |V, 2\rangle \right) \left(\langle H, 1| + \langle V, 2| \right) \left| D_j \right\rangle$$

$$= 0.5 \left(|H\rangle \langle H| + |V\rangle \langle V| \right). \tag{4}$$

总结：以概念地图的形式

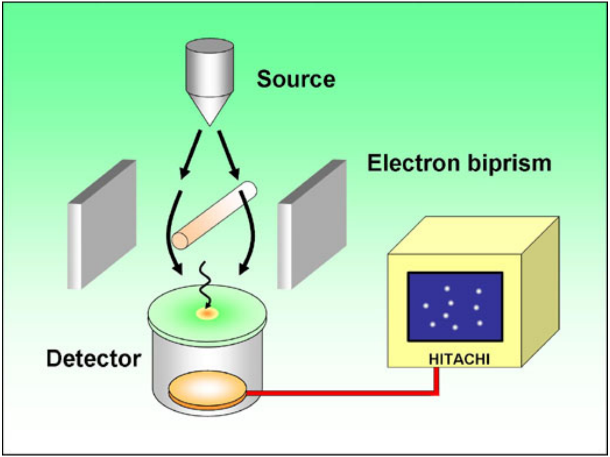
1. 本节课主体内容，相关概念以及概念之间的关系



2. 光子既是粒子又是波，既不是粒子也不是波，由概率幅的态叠加原理所描述

电子双缝干涉实验

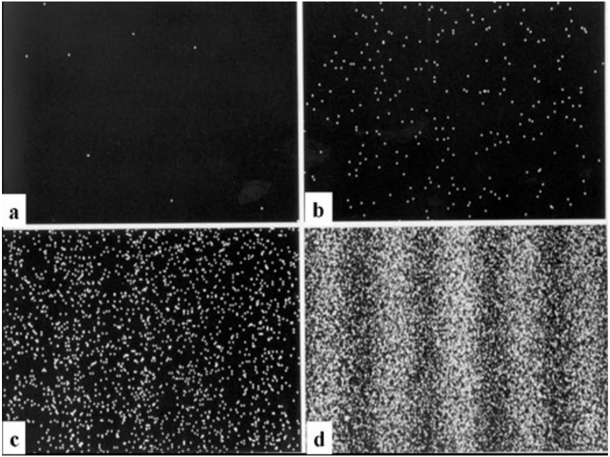
1. 实验装置



单电子过一个很窄的障碍物，打到屏幕上，然后位置信息转化成电信号

电子双缝干涉实验，续

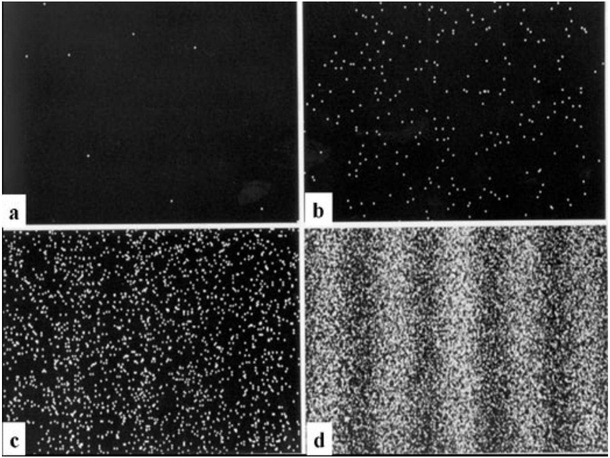
1. 实验记录录像



注意：电子一个一个的出射，一个一个的捕获

电子双缝干涉实验，续

1. 录像截图

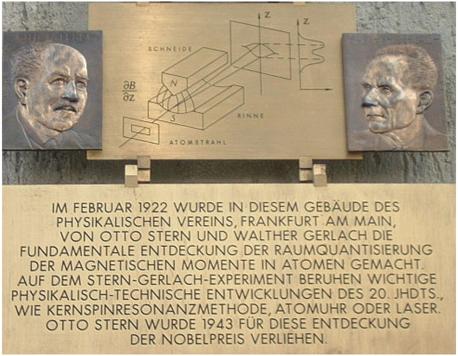


电子双缝干涉实验，续

1. 如果只打开一条缝呢?
2. 如果是豌豆射手射出的豌豆或者机枪射出的子弹呢? 强度介于强弱之间，不能比弱的还弱
3. 电子一个一个地射出，任何时候电子如果被捕获，都是整个电子的电量

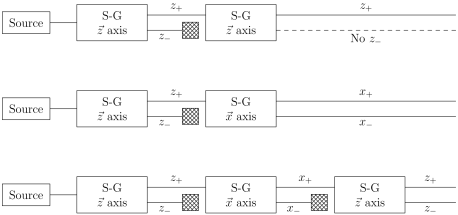
电子的自旋状态：Stern-Gerlach实验的变体

1. Stern-Gerlach装置：一个能够使电子按照某种内部方向分开其轨迹的仪器



电子的自旋状态：Stern-Gerlach实验的变体，续

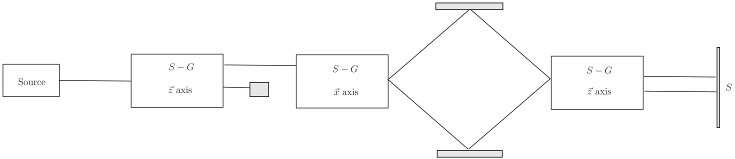
1. 现在让我们把一个出射口挡住，然后再问出来的电子的方向



2. 这里的电子的内部方向状态的三个方向之间存在着一些联系，不是很简单的联系

电子的自旋状态：Stern-Gerlach实验的变体，续

1. 假设我们把以上的实验当作事实，先接受，然后我们来做一个一个电子的which-way理想实验：把x正方向的电子拿过来，通过z方向的装置，然后再合起来，接着通过x方向的装置，问：屏幕上一个斑点还是两个？



2. 思考经典概率的情形

作业与阅读材料

1. 作业1.1：搜索“Sidney Coleman量子力学讲座”，听完，写一个报告，听不懂没关系，以后我们还要听很多遍，本课程的任务就是让你听懂这个讲座
2. 作业1.2：搜索“Stanford量子力学公开课”，听完第一次，写一个报告
3. 作业1.3：R. Feynman，Feynman物理学讲义第三卷，第一、三两章，第二章也可以读，写一个报告
4. 报告的电子文档都留着，以后需要修改这三个报告

下一步的任务

1. 描述光子、电子状态的数学形式
2. 如何用态叠加原理、测量的形式计算描述上面的实验
3. 量子系统状态的演化
4. 为了这些任务的准备：线性代数、概率论、经典力学
5. 在这之前，我们来学习如何学习——学习是为了学会运用知识，而不是记住知识，即使有的时候需要记住，也是为了作为运用知识的基础。那么如何学会运用知识呢?

概念地图教学提纲

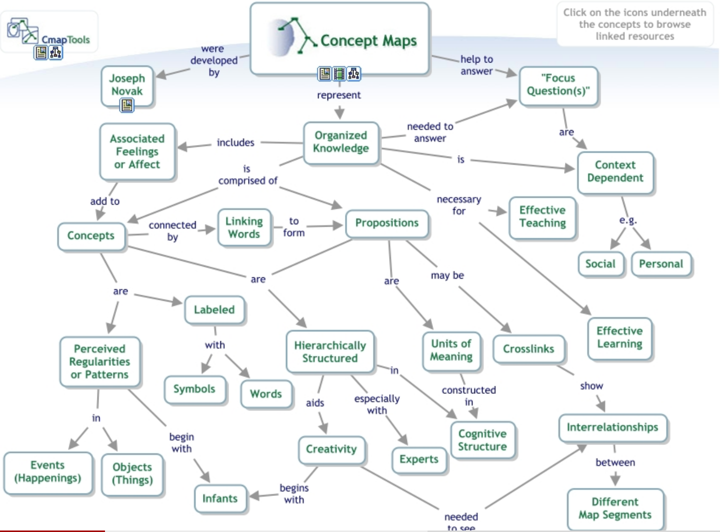
1. 什么是概念地图
2. 学习的目的
3. 知识组织形式
4. Ausubel的同化理论与建构主义认识论
5. 完成这一切的手段：概念地图，举例
6. 手动在黑板上制作概念地图
7. Cmaps工具的介绍与使用
8. 作业

什么是概念地图

1. 一个网络：顶点是概念，边是概念之间的联系，顶点与边合起来就是命题，命题的集合就是知识
2. 严格来说概念地图就是一个带结构的命题的集合，也就是带结构的知识，或者说知识的组织形式
3. 动机
   - 学习的目的：掌握知识的合理的组织结构以利于高效率的创造性的运用，前者可以依靠google和记忆，后者必须依赖与理解
   - 好的知识组织形式的优势：层次性，减轻负担、快速获取；长程连接，创造性、迁移；形成好的组织形式的过程就是理解型学习的过程
4. 理论基础：Ausubel的同化理论与建构主义认识论：教学最主要的因素是了解学生已有的知识结构，然后通过把新的知识与已有的结构联系起来形成新的结构的方式来教学与学习
5. 了解思考过程，发现理解上的不足，概念地图以及制作概念地图的过程是认知结构探测器

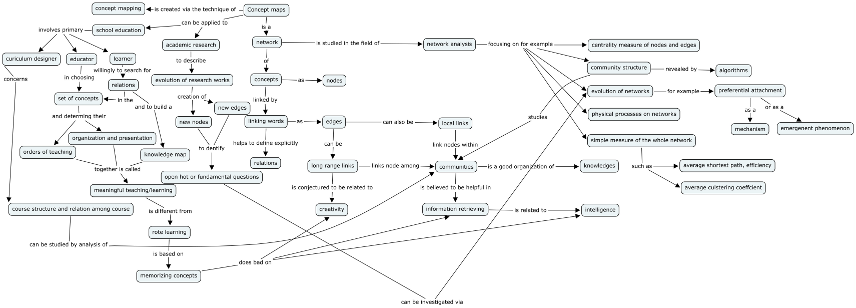
展示：关于概念地图的概念地图

1. 观察：核心问题、顶点、连接、命题、层次性、长程连接



展示：关于概念地图的概念地图，续

1. 观察：核心问题、顶点、连接、命题、层次性、长程连接



举例：水有哪些状态，如何转化

1. 核心问题：水有哪些状态，如何转化?
2. 相关概念：水的状态，液态、气态、固态、温度变化
3. 概念之间的关系：如何转化，有何不同，有什么特殊的性质
4. 有血有肉：有例子
5. 重复制作与延拓
6. Cmaps工具的介绍与使用

再举例：力学基本概念，顺便复习

1. 核心问题：力学所研究的基本问题，物体在时空中的状态，以及状态变化的原因
2. 相关概念：力学，物体，典型对象，运动状态（运动学的基本概念），运动状态变化的原因（动力学，牛顿定律），关于力（深入理解发现问题），基本技术手段，典型结论
3. 概念之间的关系：有明显的、有隐藏的
4. 力是什么，关于定理，关注概念地图的底层节点，力、时间、空间、物体
5. 层级与集团结构（运动学、动力学；物理模型、数学技术、实验观测）、长程连接
6. 力学另外的逻辑体系：状态函数、初始条件、演化方程，力——没有了
7. 概念地图引领你的思考：概念的层级的不同，集团与层次结构，长程连接，基本概念的归并，直观性，制作过程就是主动思考的过程
8. 课程小项目：阅读分析力学，构建其概念的关系地图并与牛顿力学的概念体系作比较，选作

再举例：数学与物理的关系

1. 核心问题：数学与物理的关系
2. 相关概念：数学公式、数学结构、物理实验、物理理论，对概念的把握程度不够，修改核心问题或者增加对这个领域的了解
3. 概念之间的关系：没有好的把握，草图也可以
4. 例子不太好找：以后的方向
5. 等将来重复制作与延拓
6. 作业1.4：用概念地图把前面作业中的三个报告都改写一遍
7. 课后阅读：J. D. Novak, Learning, Creating, and Using Knowledge: Concept Maps as Facilitative Tools in Schools and Corporations

线性代数提纲

1. 复习二维实矢量空间分量形式的线性代数
2. 学习二维复矢量空间分量形式的线性代数
3. 抽象矢量，抽象算符，表象理论，对易关系
4. Dirac记号，谱展开

复习二维实矢量空间的线性代数

1. 实矢量的笛卡尔坐标系下的分量表达形式，列矢量与行矢量
2. 分量表达形式的加法，数乘
3. 分量表达形式下的内积
4. 分量表达形式下的矩阵，实正交矩阵，实对称矩阵
5. 对称矩阵本征值、本征向量，算符的函数，加法，数乘，连续乘积，对易关系

需要学到的计算：二维复矢量空间的线性代数

1. 复矢量的笛卡尔坐标系下的分量表达形式，列矢量与行矢量
2. 复分量表达形式的加法，数乘
3. 复分量表达形式下的内积
4. 复分量表达形式下的矩阵，酉矩阵，厄米矩阵
5. 厄米矩阵本征值、本征向量，算符的函数，加法，数乘，连续乘积，对易关系

二维复矢量空间的内积

1. 描述对象：矢量的长度，不同状态之间差别大小的衡量
2. 矢量空间的直积到数的映射
3. 大于等于零
4. 对数乘与加法的线性操作
5. 共轭（实数域与复数域上不相同）
6. 某种坐标系下的分量形式，抽象形式与分量形式

二维Hermitian矩阵的本征向量与本征值

1. 2×2矩阵的本征值，幂算法，稳定态
2. 更一般的本征向量问题
3. 本征值的一元二次方程
4. 本征向量计算
5. 本征向量正交性
6. 正交归一基矢，基矢的非唯一性
7. 简并，唯一确定基矢集合与力学量完全集，对易关系与相容算符集

抽象矢量记号

1. 3维空间矢量的抽象记号
2. 内积，正交归一基矢，Dirac抽象记号
3. 右矢与左矢：映射语言
4. 算符的Dirac记号
5. 完全性关系
6. 算符的函数

矩阵与线性算符

1. 定义：封闭性，线性性
2. 抽象记号形式
3. 表象理论，矩阵的具体形式与算符的抽象形式
4. 酉算符，厄米算符

二维复矢量空间的加法数乘

1. 描述对象：事物的状态，一般的**可叠加**的状态
2. 3位空间矢量加法的含义：经典客体的状态是不可叠加的，位移叠加是先后两个时刻的结果之和，瞬时位置的叠加没有意义
3. 集合、集合上的加法，集合元素的数乘
4. 数乘的数与被乘的元素不是一个东西，含义是什么，什么情况下能够做数乘
5. 运算的线性性
6. 封闭性

线性代数小结

1. 矢量有抽象形式，不需要在特定的表象（也就是某一套固定基矢）下表达
2. 给定表象下，一切都是矩阵，表象就是在某一套完全确定正交归一基矢表达矢量和算符
3. 谱展开（抽象的或者表示形式的，计算本征值问题）跟矩阵完全等价
4. Dirac记号要熟练

课后思考与阅读材料

1. 课后阅读：阅读讲义的线性代数部分；推荐阅读喀兴林，高等量子力学第一章或者任何一本线性代数书整本，例如居余马
2. 作业2.1：本课程到现在为止主要讲了那些内容，它们之间有什么关系，用概念地图来表达，看不见几个模块之间的联系的话，可以分成好几片
3. 作业2.2：求3个二维Pauli矩阵的本征值本征向量，并在σ_x表象中表达所有Pauli矩阵
4. 作业2.3：计算3个二维Pauli矩阵的对易关系，计算$\sigma_z, \sigma_x + i\sigma_y, \sigma_x - i\sigma_y$之间的对易关系
5. 作业2.4：求$\sigma_z \otimes \sigma_x$的本征值与本征向量，其中$\otimes$为矩阵直积（不明白的话google之，wikipedia之）。明确写出你写下来的矩阵的基矢是什么。注意任意一个矩阵都是抽象算符在某一套基矢下的分量形式
6. 4道题布置完了，下周四上课之前交作业

概率论提纲

1. 有限简单事件集合上的概率论（古典概型）：简单事件、复合事件、频率与概率、系综的概念，概率论的矩阵表示
2. Dirac δ 函数，Kronecker δ，离散变量和连续变量概率分布函数（概率密度分布函数），累积分布函数
3. 对概率论的矩阵表示做一个线性变换?
4. 古典概率的问题：圆周上长于圆内接正三角形边长的弦的几率，概率三元体：简单事件集合Ω，事件（集合的子集）$\mathcal{F}$，事件到$[0,1]$的映射P
5. 经典随机变量的测量

古典概型

1. 古典概型：能够找到所有的简单事件，并给每一个简单事件赋予一定的几率，进而运用这些简单事件计算复合事件的几率
2. 离散随机变量与古典概型，离散点集$\Omega=\{x_1,x_2,\cdots,x_N\}$，单一事件（或者称为简单事件）记号$X_i\equiv\{x_i\}$，对应着概率$P(X_i)=p_i$，然后任意$\Omega$的子集$A$，都可以定义一个概率（$[0,1]$之间的数）$P(A)=\sum_{j;x_j\in A}p_j$。
3. 离散型古典概型的例子：六面骰子，$\Omega=1,2,3,4,5,6$，$p_i=\frac{1}{6}$，A可以是例如奇数，则$P(A)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$。随机变量的函数是$f(x)$从$\Omega$到$\mathbb{R}$的映射，例如可以是奇数赢钱偶数输钱1。
4. 我们可以讨论f的期望，方差等统计量，还可以计算f的可能取值的统计分布，计算此例。
5. 更多的例子：均匀六面色子和为7的几率，M盒子放N个球的方式（球可分辨，球不可分辨，盒子能装多个球，盒子只能装一个球）

古典概型，续

1. 连续随机变量与古典概型，连续点集$\Omega = \{\omega\}$，简单事件，记号$\omega \in \Omega$，对应着概率密度$\rho(\omega)$，然后任意Ω的子集A，都可以定义一个概率（$[0,1]$之间的数）$P(A) = \int_{\omega\in A} d\omega\rho(\omega)$。
2. 连续型古典概型（几何概率）的例子：约会等候男女朋友。

古典概型的矩阵形式——Dirac符号表示与Dirac-δ函数

1. 分布函数，密度矩阵
2. 古典概率的矩阵表示：离散点集$\hat{\rho} = \sum_{\omega} p_{\omega} |\omega\rangle\langle\omega|$；连续点集$\hat{\rho} = \int d\omega \rho(\omega) |\omega\rangle\langle\omega|$
3. 求平均，以及其他统计量，联合分布，部分积分，部分迹，求复合事件的几率
4. 简单事件之间的内积：离散情形$\langle i | j\rangle = \delta_{ij}$
5. 复合事件的观测量：$\hat{X} = \sum_{\omega \in X} |\omega\rangle\langle\omega|$
6. 连续变量分布函数$\rho(x)$，离散变量分布函数（δ函数，θ函数）

古典概型的矩阵形式小结以及一个问题

1. 密度矩阵：$\hat{\rho} = \sum_{\omega} p_{\omega} |\omega\rangle \langle\omega|$
2. 观测量（包含一般观测量与复合事件）：$A = \sum_{\omega\in A} A_{\omega} |\omega\rangle \langle\omega|$
3. 求观测量的平均，$\langle A\rangle = tr\,(A\rho)$
4. 现在密度矩阵和观测量都是矩阵，我们来做一个坐标变换

随机变量的测量与系综理论

1. 对随机变量的测量
   - 如果真的有随机硬币，我们如何理解对它的测量?
   - 决定性硬币的理解
   - 真实随机硬币的理解
   - 洒向整个空间各个方向的硬币，它到底在哪里?
2. 系综理论的思想
3. 真的随机还是信息不完全，我们在乎吗?

古典概型的问题*

1. 古典概率的问题：随机取圆周上的弦，其长度长于圆内接正三角形边长的弦的几率
2. 弦的中点，面积3/4
3. 弦的中点，垂线$\frac{\sqrt{3}}{2}$
4. 固定一端，角度$\frac{2}{3}$
5. 随机的含义到底是什么

概率空间*

1. 概率空间：概率三元体$(\Omega, \mathcal{F}, P)$
2. 集合Ω，集合元素对应简单事件记号$\omega \in \Omega$，Ω的子集A构成集合$\mathcal{T}$是Ω上的σ代数，满足，$\Omega \in \mathcal{F}$, 对可数个集合的交集封闭，对集合的补集封闭。
3. 从$\mathcal{F}$到$[0,1]$的映射P，满足
   1. 完全性：
   $$P(\Omega) = 1, \tag{5}$$
   2. 可列可加性：对于可数个不相交的集合（互斥事件，$A_i \cap A_j = \phi$，$\forall A_i, A_j$）
   $$P(\cup_i A_i) = \sum_i P(A_i) \tag{6}$$
4. 为什么定义一般的概率论体系？没有简单事件的概率，没有密度分布函数的概率。在随机过程中，研究这样的更加一般的概率。

概率空间*，续

1. 例如$\mathbb{R}$上的正态分布$\rho(x)$，x点的几率没有意义，通常我们会说x点附近dx大小的邻域的概率是$\rho(x)\,dx$。严格地说，这是不对的，dx不是任何有限大小的长度。我们真正能够说的是，对于无论多大的Δx，在x点附近的这样大的区域，概率都有很好的定义那就是

$$\int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} \rho(\xi)\, d\xi. \tag{7}$$

2. 因此，通常的能够用概率密度函数所表达的概率，都能够符合这个一般的体系。
3. 还有更一般的，不能写出实数域上的概率分布函数的概率，这个新的定义可以描述更一般的度量空间上的概率（测度论）。

概率论小结

1. 古典概型的Dirac记号表示，简单事件之间的内积
2. 概率三元体的定义，尤其是概率加法
3. 随机变量的测量

课后作业

1. 举例考虑一个单能级（能量为ϵ）的系统，可以放入任意个数的不可分辨粒子。假设放入n个粒子的几率正比于$e^{-\beta n\epsilon}$，求平均粒子数，写出密度矩阵的显式表达式
2. 作业3.1：重复以上计算，考虑一个单能级（能量为ϵ）的系统，可以放入最多一个不可分辨粒子。假设放入n个粒子的几率正比于$e^{-\beta n\epsilon}$，，求平均粒子数，写出密度矩阵的显式表达式
3. 作业3.2：重复以上计算，考虑L个能级（每一个能级的能量为ϵ_l）的系统，每一个能级上可以放入任意个数的不可分辨粒子。假设放入n_l个粒子的在第l个能级上的几率正比于$e^{-\beta n_l\epsilon_l}$，求出密度矩阵的显式解和每一个能级上的平均粒子数

课后作业，续

1. 作业3.3：重复以上计算，考虑L个能级（每一个能级的能量为ϵ_l）的系统，每一个能级上可以放入最多一个的不可分辨粒子。假设放入n_l个粒子的在第l个能级上的几率正比于$e^{-\beta n_l \epsilon_l}$，求出密度矩阵的显式解和每一个能级上的平均粒子数
2. 作业3.4：重复以上计算，考虑L个能级（每一个能级的能量为ϵ_l）的系统，每一个能级上可以放入任意个数的可分辨粒子。假设放入n_l个粒子的在第l个能级上的几率正比于$e^{-\beta n_l \epsilon_l}$，写下密度矩阵的表达式，不一定要把所有的计算都算出来

本次课的主要内容

1. 随机变量的测量
2. 经典力学，从Newton力学到Hamilton力学
3. 量子现象的经典模型
4. 概念地图、讨论

力学提纲

1. 物理学所研究的基本问题：一个东西的状态发生了变化，先问这个变化怎么描述，有什么规律；再问这个变化产生的原因是什么，怎么在这个原因和结果之间建立定量的联系
2. 物理学的核心思想就是力学
3. 力学系统的状态，位形空间、相空间
4. 从有力到没有力的力学：能量函数、相互作用
5. Hamiltonian力学，Lagrangian力学

牛顿力学

1. 牛顿力学：微观状态（$x, \dot{x}, \ddot{x}$位形空间）与演化方程

$$\vec{F} = m\vec{a}. \tag{8}$$

举例：自由落体，简谐振子

$$m\ddot{z} = -mg \text{ and } m\ddot{x} = -kx \tag{9}$$

初始条件$x(0), \dot{x}(0)$，唯一确定了方程的解。需要做受力分析。考虑单摆的独特的受力分析。

2. 一个一般的力学系统：微观状态（p, q或者$x, \dot{x}$）与微观状态的演化方程

$$\frac{d}{dt}q = \frac{p}{m} \tag{10}$$

$$\frac{d}{dt}p = f(q, p, t) \tag{11}$$

一般我们假设自治系统：$f(q, p, t) = f(q, p)$和保守系统，系统内部有势力的相互作用：$f = -\nabla V$，也就是只有q的函数。

从牛顿力学到Hamiltonian力学

1. 在这种情况下
$$\frac{d^2}{dt^2}mq+\nabla V=0\Rightarrow\dot{q}\left(\frac{d}{dt}m\dot{q}+\nabla V\right)=0$$
$$\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2+V\right)=0\qquad(12)$$
也就是$\frac{1}{2}m\dot{q}^2+V=const.$ 鉴于这个常数非常普遍，我们取一个名字：能量（H）
2. 与牛顿方程等价的哈密顿方程，相空间（变量q,p）：
$$\frac{d}{dt}q=\frac{\partial H}{\partial p}$$
$$\frac{d}{dt}p=-\frac{\partial H}{\partial q}\qquad(13)$$
3. 相空间的好处：轨道不相交，一个点唯一确定一条轨道。与位形空间中的轨迹不同。

Hamiltonian力学

1. 直接从Hamiltonian出发，单体

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + V^{ext}(q) \tag{14}$$

多体

$$H = \sum_i \left(\frac{p_i^2}{2m} + V_i^{ext}(q_i) \right) + \sum_{ij} V_{ij}(q_i, q_j)\,. \tag{15}$$

利用Hamilton方程得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} q_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{d}{dt} p_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \tag{16}$$

方程的推导下一节再说。

2. 举例：单摆、平面摆（单摆加上水平运动的悬挂点，朗道，《力学》，P11）的运动

从牛顿力学到Lagrangian力学

1. 另一个与牛顿方程等价的方程：拉格朗日方程$L = T - V$，以单粒子系统为例

$$L = \frac{m\dot{q}^2}{2} - V(q). \tag{17}$$

力学方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta \dot{q}} - \frac{\delta L}{\delta q} = 0. \tag{18}$$

多粒子系统简单推广即可，

$$L = \sum_i \left(\frac{m\dot{q}_i^2}{2} - V_i^{ext}(q_i) \right) - \sum_{ij} V_{ij}(q_i, q_j). \tag{19}$$

2. 举例：单摆、平面摆

Lagrangian力学，最小作用量原理

1. 从最小作用量原理导出运动方程
$$S=\int_{t_i}^{t_f}d\tau L\left(\tau\right) \tag{20}$$
2. 设确定的初始和结束位置：$q\left(t_i\right)=q_i, q\left(t_i\right)=q_f$，在经典轨道上作用量$S$取极小值。记经典轨道为$q^*\left(\tau\right)$，我们要找到$q^*\left(\tau\right)$满足的方程。记围绕经典轨道的微扰为$\delta q\left(\tau\right)$
$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_i}^{t_f}d\tau\left(\frac{\delta L}{\delta q}\delta q\left(\tau\right)+\frac{\delta L}{\delta \dot{q}}\delta \dot{q}\left(\tau\right)\right)\\ &= \int_{t_i}^{t_f}d\tau\left[\frac{\delta L}{\delta q}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}}\right)\right]\delta q\left(\tau\right)\end{aligned} \tag{21}$$
3. 由此，我们得到动力学方程
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}}\right)=\frac{\delta L}{\delta q} \tag{22}$$
对于我们的单粒子系统，这个方程成为牛顿方程

从Lagrangian方程到Hamilton方程

1. 从$L(q,\dot{q},t)$到$H(q,p,t)$，其中$p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$。自变量发生了变化，函数也发生了变化$H=p\dot{q}-L$，我们希望找到等价的方程。
2. 考虑H的全微分，

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial q}dq+\frac{\partial H}{\partial p}dp=dH&=d(p\dot{q})-dL\\&=d(p\dot{q})-\frac{\partial L}{\partial q}dq-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}d\dot{q}=d(p\dot{q})-\dot{p}dq-pd\dot{q}\\&=-\dot{p}dq+\dot{q}dp\end{aligned}\tag{23}$$

$$\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q}\tag{24}$$

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}\tag{25}$$

3. 一句话：Newton方程，Lagrangian方程和Hamilton方程都是等价的，都可以归结为最小作用量原理。后两者用起来更方便。

力学小结

1. 运动学：参考系与坐标系，位置坐标，速度，加速度，动量，能量，角动量，时间（芝诺佯谬，Zeno's paradoxes，方励之《力学概论》P10），空间
2. 动力学：力，相互作用，运动方程，初始条件，解的存在唯一性
3. Hamilton力学：写下Hamiltonian就有了一切
4. 作业4.1：平面双摆，朗道，《力学》，P10，Hamiltonian，运动方程
5. 作业4.2：N个耦合谐振子系统，$L=\sum_{j=0}^{N}\left[\frac{m}{2}\dot{q}_j^2-\frac{k}{2}(q_j-q_{j+1})^2\right]$，其中$q_0=q_{N+1}=0$（Kerson Huang《量子场论：从算符到路径积分》P1）。正则动量，正则坐标。对于$N=2$，给定初始条件，求解轨道
6. 作业4.3：制作《力学》部分的概念地图
7. 作业4.4：制作《概率论》部分的概念地图

课程小结

1. 量子实验发现：光子不是要么走着一条路要么走那一条路，两条路的结果完全一样，可是合起来的结果会不一样；光子也不是分开两部分同时走两条路的，随时可测
2. 经典波动力学依靠分开两半（多光子，两部分）的思路能够在多光子情境下解释上面的现象；单光子情形下，不行。经典粒子的图景不能解释前者，能够解释后者
3. 线性代数告诉我们矢量是抽象的，通常计算的时候我们写成某一坐标系下的分量形式（表象）；Dirac符号可以很好地用来表示抽象矢量；基矢可以是某一个算符的一套本征向量
4. 概率论可以用线性代数的语言（Dirac符号）改写，可是不能做坐标变换
5. 经典力学告诉我们描述一个运动物体的状态（就是当前的状态加上相互作用完全决定了将来的状态，轨道不会重叠）需要包含两个自由度：位置、动量。这个空间叫做相空间
6. 经典力学的理论告诉我们相互作用决定一切，而描述粒子的相互作用可以用Hamiltonian 和Lagrangian

提纲

1. 尊重的实验事实有哪一些?
2. 什么是确定性的经典力学理论
3. 做一个实验来推翻这个可能性

提纲

1. 什么是随机性的经典力学理论
2. 做一个实验来显示构造这个理论的困难
3. 拥有这样一个理论的代价

提纲

1. 复习量子实验、经典力学、线性代数、概率论（已完成）
2. 再“做”一个实验，并给出一个能对这个实验做计算可验证的理论，二维系统的量子力学
3. 量子力学的一般理论（状态、物理量、测量、演化）
4. 为什么量子力学理论是这样的
5. 量子力学的绘景，含时外场通过绘景变化求解
6. 谐振子的位置表象与代数解法
7. 两自旋系统，相互作用
8. 量子信息初步：远程传输、因子分解

再“做”一个实验

1. 很多个（或者很多次）x方向向上的自旋，过x方向磁场，结果在屏幕上留下一斑点（硬币）
2. 很多个（或者很多次）x方向向上的自旋，过z（$y-z$平面的任意方向）方向磁场，结果在屏幕上留下两个斑点（多面硬币，各个面独立的还是想关联的）
3. 很多个（或者很多次）x方向向上的自旋，过z方向磁场，反射回来之后，组合起来，再过过x方向磁场，结果呢？（什么东西？）
4. 用来检测的磁场方向永远可以任意调整，总会得到一个或者两个斑点
5. 在某些特殊的方向上，可以得到一个斑点
6. 这个实验与前面的which实验实际上是一样的
7. 我们的理论怎么办？

给出一个可能的理论：只要求能计算可验证，先不问为什么

1. 自旋算符：Pauli矩阵$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$
2. 自旋的状态：σ_x的向上本征态对应的密度矩阵（明确定义一下，完全正定的、归一的、厄米的）
3. 通过x方向磁场就是计算这个方向上的可能观测值（x方向向上向下本征态，$|\mu\rangle$），其几率分布p_μ以及其平均值$\langle\mu\rangle$
4. 概率论的基本公式：给定ρ，任意测量A，我们有

$$\langle A\rangle = tr\left(A\rho\right) \tag{26}$$

5. 我们来看一看这个理论能不能对上面的实验给出说明和做出可检验的预测。我们不希望量子客体知道我们做用什么方向的测量，也就是说测量什么与状态是什么是两件无关的事情

量子客体的数学模型的要求

1. 要求：表象变换（对同一个东西可以在各各不同的方向做测量），概率性测量结果
2. 确定性的系统不行
3. 经典随机性（密度分布函数）的系统不行
4. 有一种可能：密度矩阵
5. 还有别的可能，更复杂，物理学家不喜欢，科学也不喜欢，除非别的实验要求非这样不可

量子力学的基本理论

1. 状态：线性空间矢量的密度矩阵，ρ
2. 物理量：线性空间上的厄米算符，A
3. 测量的形式理论：对某一状态测量某一物理量遵循$\langle A\rangle = tr\left(A\rho\right)$
4. 量子力学理论用于解释干涉实验
5. 系统的描述：初始状态、Hamiltonian
6. 系统的演化：Schrödinger方程

态、物理量与测量

1. 物理学家总是假设一个客观的态的存在，测量之前，它的存在性和状态不依赖于物理学家所作的测量，是否测量
2. 当然，测量之后，它的状态可以根据测量结果的不同而不同
3. 测量预期的物理量需要相应的仪器，不同的物理量可能要求不同的仪器
4. 把仪器作用于状态，会产生一个测量结果，可以记录下来
5. 测量一个硬币的重量，测量一个完全随机的硬币（假设有这样的硬币）的正面值，测量一个量子自旋（Stern–Gerlach实验，制备的方向与测量的方向可以不同）

态、物理量与测量的数学模型

1. 一个硬币的重量：没有测量之前不知道，但是肯定是一个确定值x^*，也就是说$\hat{\rho}^{cD} = \sum_x \delta(x - x^*) |x\rangle\langle x|$。
2. 一个完全随机的色子的正面值，没有测量之前不知道，但不是一个确定值而是±1之一，也就是说$\hat{\rho}^{cR} = p_+ |+\rangle\langle +| + p_- |-\rangle\langle -|$。
3. 一个完全对称的硬币（±），有三种不同的颜色（RGB），也就是说

$$\hat{\rho}^{cR} = (p_+ |+\rangle\langle +| + p_- |-\rangle\langle -|)(p_R |R\rangle\langle R| + p_G |G\rangle\langle G| + p_B |B\rangle\langle B|) \tag{27}$$

4. 一个量子自旋，没有测量之前不知道，不是一个确定值而是任意方向的±1之一，也就是说对于任意θ方向的测量，看起来都是$\hat{\rho}^{cR,\theta} = p_{+,\theta} |+,\theta\rangle\langle +,\theta| + p_{-,\theta} |-,\theta\rangle\langle -,\theta|$，而且$p_{\pm,\theta}$对于不同的$\theta$不独立。这是一个很不好的理论，看起来形式上各个参数是独立的，实际上呢又不独立。我们问，要确定这个系统的状态到底要几个自由度？

态、物理量与测量的数学模型，续

1. 先让一个自旋通过z方向磁场，假设测得之后z方向向上（或者向下）之后，再通过x方向磁场，记录测量结果是向上还是向下，多次平均以后，我们发现几率相等。类似的，我们可以测量$\hat{r}$方向，而不仅仅是x方向。结果是$\hat{r}$的函数。也就是说，已知$p_{+,z}=1$也就确定了所有其它的$p_{\pm,\theta}$。
2. 测量S_z之后还可以测量S_x甚至$S_{\hat{r}}$，而且结果是相互关联的（决定性的关联）。这一点非常重要。这表明自旋系统的自由度非常有限。在经典系统中，这样的重复测量是不可能的，除非测量的是两个独立的自由度。
3. 基于这一点，我们的数学模型要能够做表象变换，还要有几率性的描述。

态、物理量与测量的数学模型，续

1. $\hat{\rho}^Q = p_+ \left|+\right\rangle\left\langle+\right| + q\left|+\right\rangle\left\langle-\right| + q^*\left|-\right\rangle\left\langle+\right| + p_-\left|-\right\rangle\left\langle-\right|$，矩阵形式

$$\hat{\rho}^Q = \begin{bmatrix} p_+ & q \\ q^* & p_- \end{bmatrix}. \tag{28}$$

这个矩阵的默认表象是σ_z的本征矢量，也就是$\left|+\right\rangle = [1, 0]^T$，$\left|-\right\rangle = [0, 1]^T$。

2. 如果我们测量的正好就是z方向（也就是利用z方向的磁场），那么我们可以按下面的方法来计算几率分布，

$$p_+ = \left\langle+\right|\rho^Q\left|+\right\rangle = p_+, \tag{29}$$

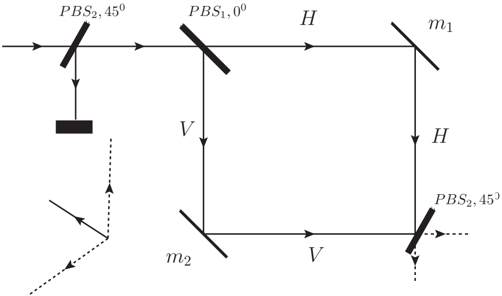
其中$\left|+\right\rangle$为测量物理量对应着的算符的本征值。更一般地说，**测量物理量A（有对应本征值α和本征向量$\left|\alpha\right\rangle$），对状态$\rho$做测量，则所得到的测量值符合如下概率分布：$p_\alpha = \left\langle\alpha\right|\rho\left|\alpha\right\rangle$**。这一点对确定性、随机性、量子客体都成立。

作业

1. 作业5.1：一个自旋（电子）经过x方向磁场，选取在向上方向（与$\hat{x}$方向相同）的自旋，问这个自旋的状态是什么密度矩阵（ρ，任意表象都行，通常取S_z表象）？这个密度矩阵在S_y表象的形式是什么（$\tilde{\rho}$）？这时候如果测量S_z得到什么概率分布函数，测量S_x呢?
2. 作业5.2：计算σ_y的本征值和本征向量，用抽象矢量$|\uparrow_x\rangle$和$|\downarrow_x\rangle$表示这些本征向量。然后，用这些σ_y的本征值来表示σ_z，写出抽象形式和矩阵形式。注意，这样的题目你可以自己给自己出上很多道来熟悉这些计算和符号。
3. 作业5.3：重新看以前作业中要求看的Susskind的视频、Feynman物理学讲义中的内容，现在重新用概念地图，加上现在你对量子力学的理解，来改写你的报告。
4. 作业5.4：看吴金闪《概念地图学习和教学方法》，写一份报告。

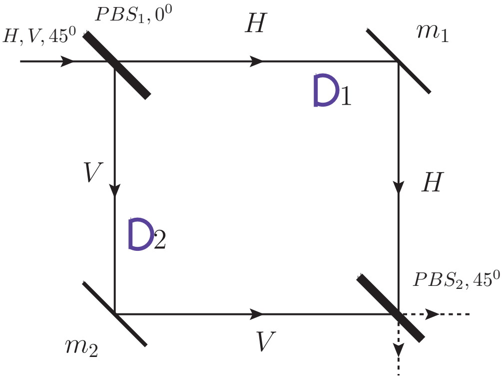
量子态的描述应用于光子which-way实验

1. 光子的经过第一个偏振分束镜以后的状态，第二个分束镜以后的状态，反射之后的状态，到达最后一个分束镜之前的状态，之后的状态



量子态的描述应用于光子which-way实验

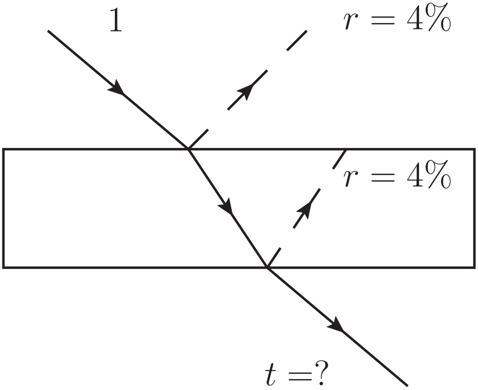
1. 如果加上一个探测器会怎样?



2. 中间有一个小小的技术问题：部分迹

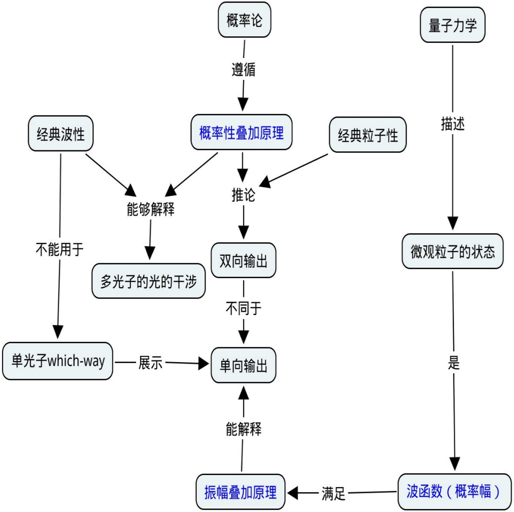
量子态的描述应用于光子过玻璃的实验

1. 光子的经过玻璃之前的状态，第一次反射光，第二次反射光，两次都透射过去的那部分光我们在这里不关心



量子力学理论和实验的概念地图

1. 量子系统的行为与经典理论和量子力学的关系



几张概念地图

1. 经典概率论的密度矩阵形式
2. 经典概率论为什么不能解释量子行为
3. 经典和量子系统的测量（先思考，然后带着问题听课，接着画图，然后比较）

作业

1. 作业6.1：已知$\sigma_{\hat{r}} = \vec{\sigma} \cdot \hat{r} = \sigma_z \sin(\theta)\cos(\phi) + \sigma_y \sin(\theta)\sin(\phi) + \sigma_z \cos(\theta)$，其中$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$为Pauli矩阵。求解矢量$|\uparrow_{\hat{r}}\rangle$和$|\downarrow_{\hat{r}}\rangle$在$\sigma_z$表象下的形式。$\hat{r}$方向由球坐标的两个角度$\theta$和$\phi$描述。
2. 作业6.2：构建一个自旋经过z方向的Stern-Gerlach装置之后，挡住向下的输出把向上的输出送到一个$\hat{r}$方向的Stern-Gerlach装置之中得到的实验结果的数学描述。一个这样的数学描述包含：任意时刻的状态，测量的可观测量，测量各种结果及其几率等的数学模型。
3. 作业6.3：计算一个自旋经过z方向的Stern-Gerlach装置之后，挡住向下的输出把向上的输出送到一个$\hat{r}$方向的Stern-Gerlach装置之中，挡住向下的输出，再送到一个z方向的Stern-Gerlach装置之后的实验结果。试验结果的描述需要包含所有的可能结果以及各个结果的几率。

作业，续

1. 作业6.4：计算一个自旋经过z方向的Stern-Gerlach装置之后，挡住向下的输出把向上的输出送到一个x方向的Stern-Gerlach装置之中，接着把两个可能的输出经过反射再次合起来，送到一个z方向的Stern-Gerlach装置之后的实验结果。试验结果的描述需要包含所有的可能结果以及各个结果的几率。

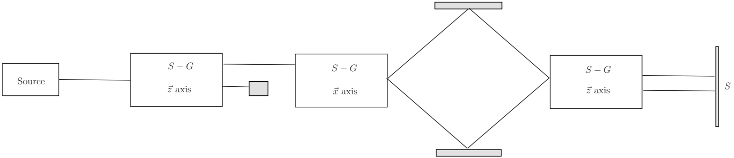


Figure: 自旋的which-way实验装置示意图

作业，续

1. 作业6.5：坐标变换对自旋状态的作用：考虑一个三维位置空间的矢量，一个绕z抽转动α角度的操作可以写成一个矩阵形式（先试着写下来试试，找找感觉）。现在，我们来考虑同样的转动对于自旋状态的效果。取任意一个自旋，看一看经过这个转动之后自旋的状态的数学表达式成了什么样，然后尝试用矩阵运算的方式把前后两个自旋状态联系起来。问这个时候那个联系着之前的和之后的自旋状态的矩阵是什么？对于任意的转动，我们可以写下来这个相应的矩阵吗？对三维空间的矢量是可以的。对于任意的转动，你不需要明确写下这个表达式。但是如果通过查阅资料能够找到，也可以写下来，不计分。提示：对于自旋，尝试考虑幺正变换，也就是$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle$的形式；可以考虑一个原来是$\hat{r}(\theta,\phi)$方向向上状态的自旋矢量，经过坐标轴旋转之后成了哪一个方向的矢量，然后通过这个写下新的矢量的表达式；不一定要按照提示的思路。

测量与相应算符的对易性

1. 考虑对易的有限维（维数为N）算符$[A,B]=0$，则A、B存在共同本征向量集合，记为$\{|\mu\rangle\}$，在这个表象下，A、B只有对角元素。为简单计，假设每一个本征值都不同，那么

$$A = diag\left(\left[\alpha_1,\cdots,\alpha_\mu,\cdots\alpha_N\right]\right), B = diag\left(\left[\beta_1,\cdots,\beta_\mu,\cdots\beta_N\right]\right). \quad (30)$$

假设系统的状态已经被制备到算符A的某一个本征态$|\alpha_1\rangle$上，那么测量物理量B我们的到什么?

$$P_\mu = \langle\mu|\rho|\mu\rangle = \langle\mu|\alpha_1\rangle\langle\alpha_1|\mu\rangle = \delta_{1\mu}, \quad (31)$$

也就是说我们仍然得到状态$|\alpha_1\rangle$（为什么？），测得值β_1。

2. 如果我们所有的物理量对应着的算符都对易，那么我们可以找到这些算符的共同本征态，在这个表象下，算符和状态都是对角矩阵，量子力学成为经典概率论（只用对角元）。
3. 补充线性代数部分作业题：定义算符L，$L\rho=i[H,\rho]$，求解$L^\dagger\rho$。注意这里L的作用对象本身是密度矩阵。类似的，求解当$L\rho=A\rho$的情况。

纯态与混合态，量子叠加原理

1. 量子态ρ的一个特例：只有一个非零本征值（这个值必须为1），其他全是零，这样的状态称为纯态，记相应的本征矢量为$|\psi\rangle$，则
$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| . \tag{32}$$
在这个意义上，有两个以及两个以上的非零本征值的量子态称为混合态。
2. 经典叠加原理（概率性叠加）：完全随机的硬币的状态为，0.5的几率正面，0.5的几率反面，因此
$$\rho^c = 0.5\,|+\rangle\langle+| + 0.5\,|-\rangle\langle-| . \tag{33}$$
3. 量子叠加原理（相干叠加）：光子过缝1还是过缝2完全无偏，则
$$\rho_1^Q = \frac{1}{2}\left(|1\rangle + |2\rangle\right)\left(\langle 1| + \langle 2|\right), \tag{34}$$
还是
$$\rho_2^Q = 0.5\,|1\rangle\langle 1| + 0.5\,|2\rangle\langle 2|? \tag{35}$$
有区别吗？

纯态与混合态，量子叠加原理，续

1. 有区别：观察光子落在某一个点z上的几率

$$P_{z,1} = \langle z|\rho_1^Q|z\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle z|1\rangle\langle 1|z\rangle + \langle z|2\rangle\langle 2|z\rangle\right) \tag{36}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\langle z|1\rangle\langle 2|z\rangle + \langle z|2\rangle\langle 1|z\rangle\right), \tag{37}$$

而

$$P_{z,2} = \langle z|\rho_2^Q|z\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle z|1\rangle\langle 1|z\rangle + \langle z|2\rangle\langle 2|z\rangle\right). \tag{38}$$

2. Eq. (37)只出现在$P_{z,1}$中。我们需要这一项吗?
3. 我们需要，这是在我们的量子客体的数学模型中干涉花样产生的机制，不仅仅是概率叠加。
4. 回过头来，我们再来看算符的非对易性。如果所有算符都对易，那么密度矩阵永远对角，也就是说Eq. (37)的项永远也不会出现，我们只能做概率叠加，也就是没有量子相干性。

量子客体的数学模型，小结

1. 量子现象展现了相干性，相干性要求相应的状态的数学模型是一个矩阵，可以存在非对角元
2. 量子物理量不能完全对易，也就是说他们必须是矩阵算符；如果完全对易，总存在着一组基矢使得密度矩阵和物理量都完全对角，因而没有相干性
3. 由于非对角元的存在导致状态之间两种不同的叠加：概率性相加与量子叠加，后者保留相干性，通常简单称为叠加原理
4. 量子力学的核心概念被很多人认为是："叠加原理"，"算符非对易关系"等等，也没有错
5. 更准确地说就是：量子实验要求量子事件之间存在着加法，而经典事件之间不存在这样的代数运算；记住一句话：**事件之间的加法运算导致了量子性**

外场中的量子系统

1. 外场中的经典系统由Hamiltonian描述，例如谐振子场中的粒子：$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0 x^2$
2. 外场中的量子自旋，$\hat{r}$方向的强度为h的磁场：

$$H = h\hat{r}\cdot\vec{\sigma} \tag{39}$$

其中$\vec{\sigma} = \left[\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\right]^T$，称为Pauli矩阵，遵循

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\sum_k \epsilon_{ijk}\sigma_k = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k. \tag{40}$$

ϵ_{ijk}为反称张量（$\epsilon_{123} = 1$，交换任意两个角标值变号）。$[A, B] = AB - BA$称为A、B的对易子。

量子系统演化的实验观测

1. 考虑一个外场中的量子自旋：初态的确定，过z方向磁场挡住向下的自旋流，只让向上的通过
2. 然后过某一个方向，例如x方向的磁场，在t时刻出来，我们想知道这个时候自旋的状态
3. 这个一般的状态是不是还是$|\uparrow_z\rangle\langle\uparrow_z|$?
4. 这个我们可以测量，方法是让这个自旋再经过一个z方向的磁场，看一看出来的自旋有几个方向，以及统计它们的几率
5. 实验发现，可以有两个输出，也就是说，不是$|\uparrow_z\rangle\langle\uparrow_z|$。那么是什么呢？最一般的就是

$$\rho(t) = \begin{bmatrix} p & a - ib \\ a + ib & 1 - p \end{bmatrix} \tag{41}$$

6. 我们希望通过实验知道所有的参数，p, a, b
7. 这个问题的答案决定了下面的演化方程，演化过程的数学模型

量子态的演化

1. 在t时刻系统的状态由态矢量（纯态）$|\psi(t)\rangle$或者密度矩阵（混合态）$\rho(t)$描述；
2. 外场对系统的相互作用由Hamiltonian（哈密顿量）H描述；
3. 问：从一个初始状态$|\psi(0)\rangle$或者$\rho(0)$开始，t时刻系统处于什么状态？
4. Shrödinger方程：

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle; \tag{42}$$

或者Liouville方程：

$$i\hbar\frac{d}{dt}\rho(t) = [H,\rho(t)]. \tag{43}$$

当$\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$两者等价。

演化算符

1. 定义演化算符$\left|\psi(t)\right\rangle = U(t, t_0)\left|\psi(t_0)\right\rangle$，
则$\rho(t) = U(t, t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t, t_0)$，且$U(t|_{t=t_0}, t_0) = I$.
2. 假设哈密顿量H不依赖于t，则

$$i\hbar\frac{d}{dt}U(t, t_0) = HU(t, t_0), \tag{44}$$

形式解

$$U(t, t_0) = e^{-i\frac{1}{\hbar}H(t-t_0)} \tag{45}$$

满足

$$UU^\dagger = U^\dagger U = I. \tag{46}$$

这个形式解可以展开成

$$U(t, t_0) = \sum_n e^{-i\frac{1}{\hbar}E_n(t-t_0)}\left|n\right\rangle\left\langle n\right|. \tag{47}$$

3. 所以问题转变成如何求得H的本征向量和本征值。

举例

1. 自旋，$H = \mu B_x S_x$，$\rho_0 = |\uparrow_z\rangle\langle\uparrow_z|$，求$t$时刻做$\sigma_y$测量得到的结果。

作业

1. 作业7.1，自旋的演化与测量，$H = \mu\vec{B} \cdot \vec{S}$，$\rho_0 = |\uparrow_z\rangle\langle\uparrow_z|$，求$t$时刻做$\sigma_y$测量得到的结果。其中$\vec{B}$是一个一般的三维矢量，可以考虑用$(\theta, \phi)$来表达。
2. 作业7.2：自学第七章的前两节，然后回顾三个讲座（Coleman的，Susskind的，Feynman的），用概念地图的方式重新写三个讲座的报告。

表象变换与绘景变换

1. 物理量集合，相容物理量集合，力学量完全集，好量子数，表象
2. 表象变换：$\left|\tilde{\psi}\right\rangle = S\left|\psi\right\rangle$必须同时做变换$\tilde{A} = SAS^{-1}$，才能保持观测量不变
3. 绘景变换：

$$\left|\psi(t)\right\rangle^{H} = e^{iHt}\left|\psi(t)\right\rangle^{S}, \tag{48}$$

诱导变换

$$A^{H}(t) = e^{iHt}A^{S}(t)e^{-iHt}. \tag{49}$$

好处：$\left|\psi(t)\right\rangle^{H}$不依赖于时间，不用求解，但是要求解$A^{H}(t)$。

4. Heisenberg方程

$$\frac{d}{dt}A^{H}(t) = i\left[H, A^{H}(t)\right]. \tag{50}$$

作业

1. 作业7.3：坐标变换对自旋算符的作用：在作业6.5中，我们考察了坐标变换对于自旋矢量的对用，现在我们来考虑坐标变换对于自旋算符的作用。这个对于算法的作用，我们有两种角度来看，而且两者应该给出相同的答案。第一种角度，问一个$\hat{r}(\theta,\phi)$方向的自旋算符经过绕z轴转动α角度以后成了什么算符，然后直接把这个算符写下来。第二种角度，通过前面作业6.5我们知道这个转动对于矢量来说，相当于什么操作，那么现在，我们只需要把任意一个$\hat{r}(\theta,\phi)$方向的自旋算符看作是其本征矢量的组合形式，形如$\sigma_{\hat{r}}=|\uparrow_{\hat{r}}\rangle\langle\uparrow_{\hat{r}}|-|\downarrow_{\hat{r}}\rangle\langle\downarrow_{\hat{r}}|$，然后对这些本征矢量（和相应的左矢）做相应的操作就可以。试着其中一种，然后验证另外一种。在答案中呈现其中一种就可以。

作业，续

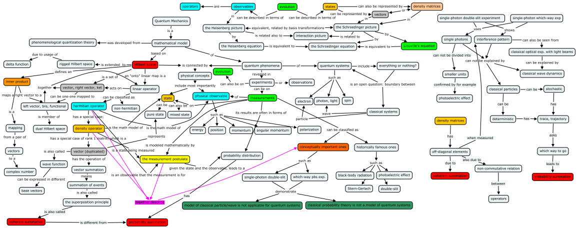
1. 作业7.4：算符的函数，阅读讲义3.2.4小节，用自己的计算完成例3.2.1。

举例

1. 经典谐振子的计算，经典Hamilton方程的解，经典Lagrange方程的解。
2. 量子谐振子，$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$，Heisenberg方程的解。
3. 量子谐振子，Shrödinger方程的解。
4. 量子谐振子，代数解法，对易关系的核心地位。
5. 作业8.1，重复以上计算，可以看书，参考讲义，但是要扔掉书以后独立推导一遍。
6. 作业8.2，完成讲义上的作业8.3.1。
7. 作业8.3，自己做一个量子力学的总结，采用概念地图和文字说明相结合的方式。

量子力学小结

1. 概念地图的概念，应用，举例
2. 量子力学的概念地图



3. 用汉语复习一遍讲义

两自旋系统

1. 自由度
2. 态与算符
3. 无相互作用下的演化，哈密顿量
4. 有相互作用下的演化，哈密顿量
5. 测量：测一个自旋，测两个自旋
6. 测量后状态，测量的含义

两硬币系统

1. 四个典型的状态，记为$|++\rangle\langle++|$、$|+-\rangle\langle+-|$、$|-+\rangle\langle-+|$、$|--\rangle\langle--|$
2. 两个完全独立的硬币，单个硬币本身完全对称，则状态为以上四个状态各占$\frac{1}{4}$，也就是

$$\rho^{12,c}=\frac{1}{4}\left(|++\rangle\langle++|+|+-\rangle\langle+-|+|-+\rangle\langle-+|+|--\rangle\langle--|\right). \tag{51}$$

可以验证

$$\rho^{12,c}=\rho^{1,c}\otimes\rho^{2,c}, \tag{52}$$

其中$\rho^{1,c}=\frac{1}{2}\left(|+\rangle\langle+|+|-\rangle\langle-|\right)=\rho^{2,c}$。
3. 一个稍微有意思一点的两硬币系统是这样的：

$$\rho^{12,c}=\frac{1}{2}\left(|++\rangle\langle++|+|--\rangle\langle--|\right). \tag{53}$$

其含义是：尽管两个硬币的状态都是随机的，但是它们保持一致。

两硬币系统，测量

1. 以上状态的矩阵表示
2. 测量：测一个硬币，测两个硬币，测量的矩阵表示和运算，$A = |+\rangle\langle+| \otimes I^{(2)}$
3. $\langle A\rangle = tr\left(A\rho\right)$，测量的结果
4. 从测量中推测状态：例如对于第一个状态，可以推测出来

$$\rho^{1,c} = \frac{1}{2}\left(|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|\right) = tr^{-1}\left(\rho^{12,c}\right) \tag{54}$$

于是，一个可能的整体状态就是$\rho^{12,c} = \rho^{1,c} \otimes \rho^{2,c}$，正好符合真正的两硬币状态；如果对第二个状态实行同样的推测，就会发现结果不对，也就是

$$\rho^{12,c} \neq \rho^{1,c} \otimes \rho^{2,c}. \tag{55}$$

5. 前者称为直积态，独立系统；后者称为关联态，系统之间不独立。

两自旋系统

1. 四个典型的状态，记为$|++\rangle$、$|+-\rangle$、$|-+\rangle$、$|--\rangle$，注意到经典力学和经典概率论和量子力学的状态的区别是左矢右矢拆开没有/有意义。
2. 可以存在以上讨论过的两个完全独立的自旋的状态，以及两个相互关联的自旋的状态。
3. 我们来考虑一个这样的状态

$$\rho^{12,q} = \frac{1}{2}\left(|++\rangle\langle++| + |++\rangle\langle--| + |--\rangle\langle++| + |--\rangle\langle--|\right). \tag{56}$$

可以验证

$$\rho^{12,q} \neq \rho^{1,q} \otimes \rho^{2,q}, \tag{57}$$

其中$\rho^{j,q} = tr^{-j}\left(\rho^{12,q}\right)$，可以通过单个自旋的测量推测出来。部分迹的计算。

4. 注意：对于单个自旋的状态，我们只需要做三个独立的方向的测量。不明白的回去翻讲义。

两自旋系统，测量，纠缠态

1. 也就是说我们发现以上的状态是一个关联系统：尽管两个自旋的状态都是随机的，但是它们保持一致。
2. 那么它是否与前面的关联态一样呢？

$$\tilde{\rho}^{12,q} = \frac{1}{2}\left(|{+}{+}\rangle\langle{+}{+}| + |{-}{-}\rangle\langle{-}{-}|\right). \tag{58}$$

3. 我们来做一个坐标变换，注意坐标变换以后的对角元就是那个坐标下测量得到的几率，例如从以上的σ_z表象到σ_x表象
4. $\rho^{12,q}$看起来一模一样，但是$\tilde{\rho}^{12,q}$不一样了。
5. 对于$\rho^{12,q}$，两个自旋不管在哪一个方向上做测量，单独来看都是$\rho^{1,q} = \frac{1}{2}I$，但是联合起来看，他们都是保持一致的；对于$\tilde{\rho}^{12,q}$，两个自旋在$z$方向上做测量，单独来看都是$\rho^{1,q} = \frac{1}{2}I$，但是联合起来看，他们都是保持一致的，在其他方向上不是这样。
6. 量子纠缠态与经典关联态的相同与不同：$\rho^{12,q}$这样的状态称为纠缠态，$\tilde{\rho}^{12,q}$这样的称为关联态。或者把纠缠态称作量子关联态，后者称为经典关联态更合适。

两自旋系统，测量后状态

1. 所谓测量，就是知道系统当时的状态
2. 是不是可以推广成：就是知道系统立即（就是什么别的也没有发生）再一次被测量得到的状态呢，经典力学是不成问题的
3. 量子力学我们假设这一条还是不成问题的
4. 那么，系统被测量以后的状态，如果测量结果是$|\alpha\rangle\langle\alpha|$（注意：不管有多少种可能单次测量的结果只能是其中之一），那么系统的状态就是$|\alpha\rangle\langle\alpha|$
5. 利用这个假设，我们来看一下量子和经典系统测量以后的状态
6. 混合态密度矩阵，混合态与纯态

两自旋系统，演化

1. $H = \sigma_x^{(1)} \otimes I^{(2)} + I^{(1)} \otimes \sigma_x^{(2)}$
2. $H = \sigma_x^{(1)} \otimes \sigma_x^{(2)}$
3. $\rho_0 = |++\rangle\langle++|$
4. t时刻的状态
5. 测量第一个自旋得到的结果的几率分布
6. 某一个结果出现以后系统的状态

两自旋系统，作业

1. 作业9.1完成讲义上的作业9.3.1
2. 作业9.2完成讲义上的作业9.3.2
3. 作业9.3量子力学总结可以交了，这个总结可以与概念地图和理解型学习结合，也可以和理解型学习分开，采用概念地图加上文字的形式。强烈鼓励把量子力学的总结和学习方法的体会分开。但是，如果你们要结合，我也不反对
4. 作业9.4三个讲座的总结，采用概念地图加上文字的形式，从现在起都可以交，到考试当天的晚上12点截止
5. 之前的概念地图，如果有的话，一并上传到概念地图服务器：cmap.systemsci.org，前一个端口4447不用修改，后一个端口80改为8088

量子远程传态

1. 三个自旋构成的系统
2. 关联与纠缠
3. 纠缠态的部分测量
4. 远程传输的实验与理论
5. 课程项目：通过google或者ISI web of science，检索远程传输的文章，总结一下其基本理论（包含最主要的文章），在至少三种系统上的实现的实验以及理论工作

量子远程传态，续

1. 基本问题：Alice拿了一个自旋，想告诉Bob这个自旋的状态是什么
2. 第一种方法：Alice做三个独立的方向测量，告诉Bob测量结果，Bob按照这个信息制备相应的态
3. 需要完整地描述被传输的态，然后重新制备。完整描述高维系统的量子态是不容易的。看过StarTrek的“远程传态”
4. 巧妙的方法：Alice和Bob拿着一对特殊的通讯装置：两个纠缠起来的自旋：

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)\,. \tag{59}$$

然后对于给定的未知状态

$$|\psi_o\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle\,, \tag{60}$$

通过一次测量和一次转动操作就能够使得

$$|\psi_B\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle\,. \tag{61}$$

量子远程传态，续

1. 第一步，通过操作Alice自己的自旋与被传输的自旋（细节忽略），使得

$$|\psi_{oAB}\rangle = \frac{1}{2}\left[\alpha\left(|0\rangle + |1\rangle\right)\left(|00\rangle + |11\rangle\right) + \beta\left(|0\rangle - |1\rangle\right)\left(|10\rangle + |01\rangle\right)\right] \tag{62}$$

改写一下成为

$$\begin{aligned} |\psi_{oAB}\rangle = \frac{1}{2}&\left[|00\rangle\left(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle\right) + |01\rangle\left(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle\right)\right. \\ &\left.+|10\rangle\left(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle\right) + |11\rangle\left(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle\right)\right]. \end{aligned} \tag{63}$$

2. 第二步，测量oA两个自旋。测量后状态，例如

$$00 \Longrightarrow |\psi_B\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \tag{64}$$

3. 第三步，Alice告诉Bob测量的结果
4. 第四步，Bob通过一次转动操作（这个例子不用转动）就能够使得

$$|\psi_B\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle. \tag{65}$$

进一步阅读

1. 有兴趣的可以进一步阅读Shor大数因子分解算法，量子并行性
2. 强烈推荐Neilsen和Chuang的《量子计算与量子信息》
3. 可选择的大作业：查阅原始文献、综述论文、教材，了解Shor因子分解算法，用自己的语言表述，并给出目前这个算法的研究现状、应用等方面的述评